6 ЛЕКЦИЯ

Инерция центрі. Келтірілген масса.

Массалар центрі немесе ауырлық центрі деп те аталатын инерция центрі жүйенің бүкіл массасының эффективті орны деп санауға болатын нүкте болып табылады. Ол денелердің қозғалысы мен өзара әрекеттесуін талдауда маңызды рөл атқарады және жүйенің барлық массалық элементтерінің орташа салмақты орны ретінде анықталады, әрбір элемент оның массасына сәйкес ескеріледі. Математикалық түрде инерция центрі формула арқылы есептеледі.

Инерция центрінің келесі қасиеттері бар: инерция центрі жүйедегі массаның таралу пішініне немесе тығыздығына тәуелді емес. Ол тек масса элементтерінің массалары мен орындарымен анықталады; егер жүйеде симметрия болса, инерция центрі жүйенің симметрия центрі болып табылады; сыртқы күштер болмаған кезде инерция центрі тыныштық күйде болады немесе түзу сызықта және инерция центрі бойынша біркелкі қозғалады (инерция заңы), бұл нүктеде жүйенің бүкіл массасы шоғырланған деп есептелінеді.

Механикалық жүйелерді зерттеуде инерция центрінің маңызы зор, өйткені ол жүйенің күрделі массалық үлестірімін нүктелік масса түріндегі қарапайым математикалық сипаттаумен ауыстыру арқылы есепті жеңілдетуге мүмкіндік береді. Бұл импульстің және импульс моментінің сақталу заңдары сияқты механиканың негізгі принциптерін тұтас жүйеге қолдануға мүмкіндік береді.

Лагранж функциясын

$$L=\sum_a \frac{m_a\upsilon_a^2}{2}-U\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_a\right) \tag{39}$$

дифференциалдап, импульсті нүктенің жылдамдығы арқылы жазамыз:

$$\vec{P}=\sum_a m_a\vec{\upsilon}_a \tag{40}$$

Жүйенің импульсі нүктелердің импульсінің қосындысына тең

$$\vec{P}_a=m_a\vec{\upsilon}_a \tag{41}$$

(41) физикалық мағынасы $\frac{\partial L}{\partial r_a}=-\frac{\partial U}{\partial r_a}$, a -бөлшегіне әсер етуші $\vec{F}_a$ күші екенін білеміз. Сонда (3) бүкіл жүйеге әсер етуші қорытқы күш $\vec{F}_a$ тұйық жүйе үшін нөлге тең екенін көруге болады:

$$\sum_a \vec{F}_a=0 \tag{42}$$

Яғни Ньютонның үшінші заңы бойынша екі материалдық нүктеден тұратын тұйық жүйедегі екінші бөлшектің бірінші бөлшекке әсер етуші күші мәні бойынша және бағыты бойынша сол бірінші бөлшектің күшіне мәні бойынша тең, ал бағыты бойынша қарама-қарсы.

Егер жүйені жалпылама координата арқылы өрнектесек, жалпылама импульс:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{43}$$

Ал оның туындысы жалпылама күш деп аталады:

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{44}$$

Ал осы жағдайлардағы Лагранж теңдеуінің түрі:

$$\dot{P}_i = F_i. \tag{45}$$

Егер K' санақ жүйесі K санақ жүйесіне қатысты $\vec{V}$ жылдамдықпен қозғалса, онда олардың импульс мәні әртүрлі болады, яғни $\vec{P}, \vec{P}'$ болады. Ал сол жүйелердегі материалдық нүктелердің осы санақ жүйесіне қатысты жылдамдықтары:

$$\vec{v}_a = \vec{v}' + \vec{V}. \tag{46}$$

Сондықтан,

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \sum_a m_a \vec{v}'_a + \sum_a m_a \vec{V} = \vec{P}' + \vec{V} \sum_a m_a; \tag{47}$$

Егер K' санақ жүйесінде $\vec{p}' = 0$ болатындай тұйық жүйе үшін $\vec{p}' = 0$, болса

$$\vec{P} = \vec{V} \sum_a m_a; \tag{48}$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{P}}{\sum_a m_a} = \frac{\sum_a m_a \vec{v}_a}{\sum_a m_a}. \tag{49}$$

Дифференциалдық түрде:

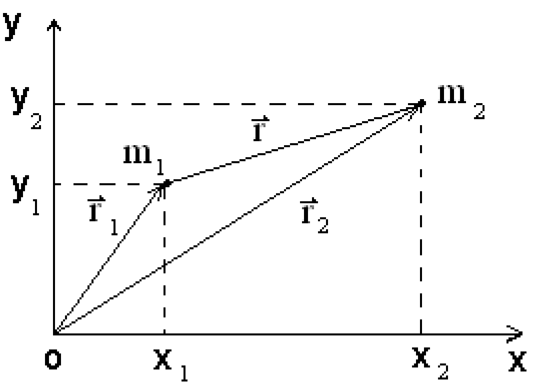
$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}. \tag{50}$$

(45) тұйық жүйенің жылдамдығы. Ол импульстің мәнін бір ғана материалдық бөлшектің массасы: $\mu = \sum_a m_a$. Сол жүйедегі бүкіл бөлшектердің массасының қосындысына тең болған жағдайда қандай болар еді, соны түсіндіреді.

$$\vec{R} = \frac{\sum\limits_a m_a \vec{r}_a}{\sum\limits_a m_a}. \qquad (51)$$

Осыны *инерция центрі* деп атайды.

Әсерлесуші екі дененің бірін орталық дене деп, оның массасын салыстырмалы түрде үлкен деп алып жүр едік. Мысалы мынадай есептерде екі дененің массалары жуық түрде бірдей болсын (қос жұлдыз, протон-нейтрон, т.б.). Осындай кездерде екі дененің қозғалыс есебін бір дененің қозғалыс есебіне түрлендіруге болады. Тұйық жүйеде осы екі дене тек бір-бірімен ғана әсерлеседі деп қарастырамыз.



Сурет 16.

Массасы m_1 дененің радиус векторы $\vec{r}_1$, ал массасы m_2 дененің радиус векторы $\vec{r}_2$. Құраушылары $r_1(x_1, y_1, z_1)$ және $r_2(x_2, y_2, z_2)$. Белгілі формула бойынша екі нүктенің инерция центрі:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad (52)$$

екі нүктенің радиус векторларын бір-бірімен салыстырғанда

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \qquad (53)$$

Енді $\vec{r}_1$ және $\vec{r}_2$ табамыз.

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \dfrac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \dfrac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2} \end{cases} \qquad (54)$$

Дифференциалдық түрде:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \dfrac{m_2\dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} \\ \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} - \dfrac{m_1\dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} \end{cases} \tag{55}$$

ал кинетикалық энергия:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\vec{r}}^2 \tag{56}$$

Есептің шарты бойынша нүктелерге сыртқы күштер әсер етпегендіктен потенциалдық энергия олардың арақашықтығына ғана байланысты:

$$U = U(\vec{r}) \tag{57}$$

сонымен Лагранж функциясы:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{R}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{r}^2 - U(\vec{r}) \tag{58}$$

(58)-дифференциалдап, координата центріне арналған Лагранж теңдеуін жазамыз:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = (m_1 + m_2)\dot{R} \tag{59}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = 0 \tag{60}$$

Лагранж теңдеуінен:

$$\frac{\partial L}{\partial R} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = 0 \tag{61}$$

және $\ddot{R} = 0$ болғандықтан,

1

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_0 t + \vec{R}_0 \tag{62}$$

Сонымен, инерция центрі бастапқы санақ жүйесіне қатысты бір қалыпты түзу сызықты қозғалады. Бұл жүйені инерциалды деп аламыз. Себебі осындай жүйелерде екі нүктенің өзара әсерлесу күші тек потенциалдық энергияға ғана тәуелді. Егер екі дененің инерция центрі бекітілген санақ жүйесіне көшсек, тек радиус вектор $\vec{r}$ -ға тәуелді қозғалыс қана қалады:

$$\vec{R} = 0 \tag{62}$$

$$L_{и.ц.} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\dot{r}^2 - U(r) \qquad (64)$$

Массалары m_1 және m_2 екі дененің қозғалысы есебін массасы

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (65)$$

бір дене есебіне алмастыруға болады. (65)- келтірілген масса деп аталады.
Егер $\vec{R} = 0$ деп, инерция центрін қозғалмайтын және тыныштықтағы координатаның бастапқы нүктесіне қойсақ:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}. \qquad \vec{r}_2 = \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \qquad (66)$$

болады.

Сонымен, $m_1 << m_2$ болса, $r_1 << r_2$ болады да, инерция центрі массасы үлкен денеге жақын болады.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Лагранж мен Гамильтон формализмінде энергияның сақталу заңы қалай өрнектеледі?
2. Ең аз әрекет принципі қалай тұжырымдалған және ол жүйенің энергиясымен қалай байланысты?
3. Қандай физикалық жүйелер энергияның сақталу заңының уақытша бұзылуына әкелуі мүмкін және неге?
4. Импульстің сақталу заңы қандай координаталар жүйесінде қолданылады?
5. Импульстің сақталу заңы әсер мен ең аз әсер принципімен қалай байланысқан?
6. Импульстің сақталу заңы практикалық жағдайларда қалай қолданылады?
7. Инерция центрі радиус векторы өрнегін жазыңыз.
8. Келтірілген масса ұғымын түсіндіріңіз.
9. Инерция центрі дегеніміз не және ол қатты дененің қозғалысымен қалай байланысты?
10. Денелер жүйесінің қозғалысын сипаттау үшін келтірілген масса қалай қолданылады?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК

для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5